

2024 秋季初三数学每日一题打卡 014

014 试题来源:2023 秋苏州园区星海初级中学期中

红星公司生产的某种时令商品每件成本为 20 元,经过市场调研发现,这种商品在未来 40 天内的日销售量  $m$ (件) 与时间  $t$ (天) 的关系如下表:

时间 $t$ (天)	1	3	6	10	36	...
日销售量 $m$ (件)	94	90	84	76	24	...

未来 40 天内,前 20 天每天的价格  $y_1$ (元/件) 与时间  $t$ (天) 的函数关系式为  $y_1 = \frac{1}{4}t + 25$ ( $1 \leq t \leq 20$  且  $t$  为整数),后 20 天每天的价格  $y_2$ (元/件) 与时间  $t$ (天) 的函数关系式为  $y_2 = -\frac{1}{2}t + 40$ ( $21 \leq t \leq 40$  且  $t$  为整数).

下面我们就来研究销售这种商品的有关问题:

- (1) 认真分析上表中的数据,用所学过的一次函数、二次函数、反比例函数的知识确定一个满足这些数据的  $m$ (件) 与  $t$ (天) 之间的关系式;
- (2) 请预测未来 40 天中哪一天的日销售利润最大,最大日销售利润是多少?
- (3) 在实际销售的前 20 天中,该公司决定每销售一件商品就捐赠  $a$  元利润( $a < 4$ ) 给希望工程. 公司通过销售记录发现,前 20 天中,每天扣除捐赠后的日销售利润随时间  $t$ (天) 的增大而增大,求  $a$  的取值范围.

试题解析:

(1) 认真分析上表中的数据,用所学过的一次函数、二次函数、反比例函数的知识确定一个满足这些数据的  $m$ (件) 与  $t$ (天) 之间的关系式;

解: (1) 设一次函数为  $m = kt + b$ ,

将  $\begin{cases} t=1 \\ m=94 \end{cases}$  和  $\begin{cases} t=3 \\ m=90 \end{cases}$  代入一次函数  $m = kt + b$  中,

有  $\begin{cases} 94 = k + b \\ 90 = 3k + b \end{cases}$ ,  $\therefore \begin{cases} k = -2 \\ b = 96 \end{cases}$ .  $\therefore m = -2t + 96$ . 经检验,其它点的坐标均适合以上解析式,

故所求函数解析式为  $m = -2t + 96$ ;

(2) 请预测未来 40 天中哪一天的日销售利润最大,最大日销售利润是多少?

(2) 设前 20 天日销售利润为  $p_1$  元,后 20 天日销售利润为  $p_2$  元.

$$\text{由 } p_1 = (-2t + 96)\left(\frac{1}{4}t + 25 - 20\right) = (-2t + 96)\left(\frac{1}{4}t + 5\right) = -\frac{1}{2}t^2 + 14t + 480 = -\frac{1}{2}(t - 14)^2 + 578,$$

$\therefore 1 \leq t \leq 20$ ,  $\therefore$  当  $t = 14$  时,  $p_1$  有最大值 578(元).

$$\text{由 } p_2 = (-2t + 96)\left(-\frac{1}{2}t + 40 - 20\right) = (-2t + 96)\left(-\frac{1}{2}t + 20\right) = (t - 44)^2 - 16.$$

(二次函数的应用,由交点式直接得顶点式,建议大家都要具备这个实力)

$\therefore 21 \leq t \leq 40$ , 此函数对称轴是  $t = 44$ ,

$\therefore$  函数  $p_2$  在  $21 \leq t \leq 40$  上,在对称轴左侧,随  $t$  的增大而减小.

$\therefore$  当  $t = 21$  时,  $p_2$  有最大值为  $(21 - 44)^2 - 16 = 529 - 16 = 513$ (元).

$\therefore 578 > 513$ , 故第 14 天时,销售利润最大,为 578 元;

(3) 在实际销售的前 20 天中,该公司决定每销售一件商品就捐赠  $a$  元利润 ( $a < 4$ ) 给希望工程. 公司通过销售记录发现,前 20 天中,每天扣除捐赠后的日销售利润随时间  $t$ (天) 的增大而增大,求  $a$  的取值范围.

$$(3) p_1 = (-2t + 96)\left(\frac{1}{4}t + 25 - 20 - a\right)$$

对称轴为  $t = 14 + 2a$ .

$\therefore 1 \leq t \leq 20$ ,

$\therefore$  当  $t \leq 2a + 14$  时,  $P$  随  $t$  的增大而增大,

又  $\therefore$  每天扣除捐赠后的日利润随时间  $t$  的增大而增大,

$\therefore 19.5 < 2a + 14$ ,

(很多同学甚至老师都会好奇,为什么此处是 19.5? 而不是 20?)

这也是这道题诸多版本解析中始终没有说清楚的点)

$\therefore a > 2.75$

又  $\therefore a < 4$ ,

$\therefore 2.75 < a < 4$ .